2. DETERMİNANTLAR

BİR MATRİSİN DETERMİNANTI

Her $n\times n$ tipindeki (kare) matrisi, onun determinantı diyeceğimiz bir reel sayı ile ilişkilendirebiliriz. Bu sayının değeri, bize matrisin singüler olup olmadığını söyleyecek şekilde tanımlanmalıdır. Genel tanımdan önce aşağıdaki durumları düşünelim;

1. Durum: Eğer $A=(a)$ 1×1 tipinde bir matris ise A'nın tersinin olması için gerek ve yeter şart $a\neq 0$ olmasıdır. Bu yüzden A'nın determinantını ($det(A)$ ile göstereceğiz)

$$det(A)=a$$

olarak tanımlarsak, A'nın tersinin olması için gerek ve yeter şart $det(A)\neq 0$ olmasıdır.

2. Durum: 2×2 tipindeki

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

matrisinin tersinin olması için gerek ve yeter şart satırca birim matris I_2'ye denk olmasıdır. Eğer $a_{11}\neq 0$ ise

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{11}a_{21} & a_{11}a_{22} \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12} \end{bmatrix}$$ $a_{11}\neq 0$ olduğundan bu matrisin birim matrise satırca denk

olması için gerek ve yeter şart $a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}\neq 0$ olmasıdır. Eğer $a_{11}=0$ ise

$$\begin{bmatrix} 0 & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ 0 & a_{12} \end{bmatrix}$$ bu matrisin birim matrise satırca denk olması için gerek ve yeter şart $a_{21}a_{12}\neq 0$ olmasıdır. Sonuçta 2×2 tipinde bir A matrisinin determinantını

$$det(A)=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$$

olarak tanımlarsak, A'nın tersinin olması için gerek ve yeter şart $det(A)\neq 0$ olmasıdır.

3. durum: 3×3 tipindeki bir

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

matrisinin tersinin olması için gerek ve yeter şart satırca birim matris I_3'e denk olmasıdır. 2. durumdaki benzer işlemler yapılırsa,

$$det(A)=a_{11}a_{22}a_{33}-a_{11}a_{32}a_{23}-a_{12}a_{21}a_{33}+a_{12}a_{31}a_{23}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{31}a_{22}$$

olarak tanımlanırsa, bu durumda A matrisinin tersinin olması için gerek ve yeter şart $det(A)\neq 0$ olmasıdır.

Yukardakilere benzer olarak $n\times n$ tipindeki kare matrislerin determinantını $n>3$ için tanımlayalım. Bunun için önce 2×2'lik matrisin determinantına bir daha göz atalım. 2×2'lik

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

matrisin determinantını 1×1'lik matrisler yardımıyla tanımlayabiliriz;

$$M_{11}=(a_{22}) \qquad M_{12}=(a_{21})$$

olarak tanımlarsak

$$det(A)=a_{11}\,det(M_{11})-a_{12}\,det(M_{12})$$

olacaktır. Benzer şekilde 3×3'lük matrislerin, 2×2'lik matrisler yardımıyla determinantını yazabiliriz.

$$M_{11}=\begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix},\ M_{12}=\begin{bmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{bmatrix},\ M_{13}=\begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$$

olmak üzere

$$det(A)=a_{11}\,det(M_{11})-a_{12}\,det(M_{12})+a_{13}\,det(M_{13})$$

Tanım: $A=(a_{ij})$ $n\times n$ tipinde matris olsun ve M_{ij}, a_{ij}'yi içeren sütun ve satırın silinmesi ile elde edilen $(n-1)\times(n-1)$ tipinde matrisi göstersin. M_{ij}'nin determinantına a_{ij}'nin **minörü** denir. a_{ij}'nin **kofaktörü** A_{ij} ile gösterilir ve

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}\,det(M_{ij})$$

ile tanımlanır.

Buna göre 2×2'lik matrisin determinantı

$$det(A)=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}$$

ve 3×3'lük matrisin determinantı

$$det(A)=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}$$

olacaktır.

A matrisinin determinantını $|A|$ ile de gösterebiliriz.

$$det(A)=|A|$$

Tanım: Bir $n \times n$ tipindeki A matrisinin determinantı aşağıdaki şekilde tanımlanan ve $\det(A)$ ile gösterilen bir skalerdir.

$$\det(A) = \begin{cases} a_{11} & , n=1 \\ a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n} & ; n>1 \end{cases}$$

Burada $A_{1j} = (-1)^{1+j}\det(M_{1j})$ $j=1,2,\ldots,n$

A matrisinin birinci satırındaki elemanların kofaktörleridir.

Örnekler: 1) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$

$$\det(A) = |A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12}$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\det(3) = 3$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2}\det(-1) = (-1)(-1) = 1$$

$$|A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} = 2.3 + 1.1 = 7$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1}\det(M_{21}) = (-1)\det(1) = -1$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2}\det(M_{22}) = \det(2) = 2$$

$$|A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} = a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} = (-1).(-1) + 3.2 = 7$$

2) $A = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ $|A| = ?$

$$|A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12}$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\det(3) = 3$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2}\det(1) = -1$$

$$|A| = 2.3 + 6.(-1) = 0$$

1. örnekteki matrisin tersi var
bu // // // yoktur.

3) $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 4 & -1 & 5 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ $\det(A) = ?$

$$|A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\det\begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -6$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = (-1)(-6) = 6$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 6$$

$$|A| = 3.(-6) + 1.6 + 2.6 = 0$$

$$|A| = a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23}$$
$$= a_{31}A_{31} + a_{32}A_{32} + a_{33}A_{33}$$
$$= a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + a_{32}A_{32}$$

Teorem: $n \geq 2$ olmak üzere A $n \times n$ tipinde bir matris ise A'nın determinantı

$$\det(A) = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}$$
$$= a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj}$$

dır. $i,j = 1,2,\ldots,n$

Örk: $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 0 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ $|A| = ?$

$$|A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} + a_{14}A_{14}$$
$$= \underbrace{a_{13}}_{0}A_{13} + \underbrace{a_{23}}_{0}A_{23} + \underbrace{a_{33}}_{3}A_{33} + \underbrace{a_{43}}_{0}A_{43}$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$b_{21}A_{21}$

$$= (-2)\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -2$$

$$|A| = 3.(-2) = -6$$

Teorem: A $n \times n$ tipinde matris ise $\cancel{\det(A^T)}$ $\det(A^T) = \det(A)$ dır.

Örk: $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ $|A| = 7$

$A^T = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ $|A^T| = 7$

Teorem: Eğer A nxn tipinde üçgensel matris ise A'nın determinantı köşegen elemanların çarpımına eşittir.

örk: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 100 \\ 0 & 4 & 50 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ $|A| = ?$

$$|A| = 1 \cdot 4 \cdot (-2) = -8$$

Teorem: A nxn tipinde bir matris olsun.

a) A'nın bir sütunu veya satırı sıfır elemanlardan oluşmuşsa $|A| = 0$ dır.

b) A'nın herhangi iki sütunu veya herhangi iki satırı birbirinin katı ise $|A| = 0$ dır.

örk: 1) $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ $|A| = 0$

2) $B = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 3 & 1 \\ 8 & -3 & 6 & 2 \\ 12 & 8 & 9 & 9 \\ 4 & 10 & 3 & 12 \end{bmatrix}$ $|B| = 0$

Determinantın özellikleri:

Teorem: A nxn tipinde bir matris ise

$$a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \dots + a_{in}A_{jn} = \begin{cases} \det(A), & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

Örk! $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$

$$a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} = |A|$$
$$1 \cdot 1 + 2 \cdot (-3) = -5$$
$$A_{11} = 1 \quad A_{12} = -3$$

$$a_{21}A_{11} + a_{22}A_{12} = 0$$
$$3 \cdot 1 + 1 \cdot (-3) = 0$$

1. Satır işlemi; $E = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$

$$EA = \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{bmatrix}$$

$$\det(EA) = -\det(A)$$
$$= \det(E) \cdot \det(A)$$

Bir matriste herhangi iki satırın yerini değiştirirsek yeni elde edilen matrisin determinantı

ilk matrisin determinantının (-1) ile çarpılmasına eşittir. örk: $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \to |B| = -7$

2. Satır işlemi; $E = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$

$$E \cdot A = \begin{bmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

$$\det(E \cdot A) = \alpha \cdot \det(A)$$
$$= \det(E) \det(A)$$

Bir matriste herhangi bir satırı sıfırdan farklı bir sayı ile çarptığımızda

yeni elde edilen matrisin determinantı ilk matrisin determinantının α sayı ile çarpılmasına eşittir.

örk: $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -5 & 15 \end{bmatrix}$

$|A| = 7$ $|B| = 35$

3. Satır işlemi; $E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 1 \end{bmatrix}$ $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$

$$EA = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ \alpha a_{11} + a_{21} & \alpha a_{12} + a_{22} \end{bmatrix}$$

$$\det(EA) = \det A$$
$$= \det(E) \cdot \det(A)$$

örk: $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} -3 & 16 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$

$|B| = 7$

Teorem: Bir nxn tipindeki A matrisinin singüler olması için gerek ve yeter şart $\det(A) = 0$ olmasıdır.

Teorem: A ve B nxn tipinde matrisler ile

$$\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$$

dir.

örk: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$

$|A| = -5$ $|B| = -1$

$$|AB| = |A| \cdot |B| = (-5)(-1) = 5$$

$A \cdot B = \begin{bmatrix} 8 & 3 \\ 9 & 4 \end{bmatrix}$ $|AB| = 5$

örk: $A = \begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}$ $\quad B = \begin{bmatrix}2 & 1\\ +3/2 & 1/2\end{bmatrix}$

$|A| = -2 \quad |B| = -\frac{1}{2}$

$AB = \begin{bmatrix}5 & 2\\ 12 & 5\end{bmatrix} \qquad |AB| = |A||B|$

Kramer kuralı:

A nxn tipinde bir matris olsun. A matrisinden aşağıdaki gibi elde edilen yeni matrise A'nın eki denir ve

ekA ile gösterilir.

$$\text{ekA} = \begin{bmatrix}A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1}\\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2}\\ \vdots & & & \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn}\end{bmatrix}$$

$$A.(\text{ekA}) = \det(A).I$$

Eğer A'nın tersi varsa

$$A^{-1} = \frac{\text{ekA}}{\det(A)}$$

dır.

örk: $A = \begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 1\end{bmatrix}$ $\quad \text{ekA} = \begin{bmatrix}A_{11} & A_{21}\\ A_{12} & A_{22}\end{bmatrix}$

$\text{ekA} = \begin{bmatrix}1 & -2\\ -3 & 1\end{bmatrix} \qquad A^{-1} = ?$

$|A| = -5$

$$A^{-1} = \frac{\text{ekA}}{|A|} = \begin{bmatrix}-1/5 & 2/5\\ 3/5 & -1/5\end{bmatrix}$$

Teorem: A nxn tipinde tersi olan bir matris ve $b \in \mathbb{R}^n$ olsun.

A'nın i. sütununun yerine b yazılarak elde edilen matrisi A_i ile gösterelim. Eğer $Ax=b$'nin tek çözümü

$$x = \begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}$$ ise

$$x_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)} \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

dır. $\left(x_i = \frac{|A_i|}{|A|} \right)$

örk:
$$\begin{aligned} -2x_1 + 3x_2 - x_3 &= 1\\ x_1 + 2x_2 - x_3 &= 4\\ -2x_1 - x_2 + x_3 &= -3 \end{aligned}$$
lineer sistemini kramer kuralı ile çözünüz.

$$A = \begin{bmatrix}-2 & 3 & -1\\ 1 & 2 & -1\\ -2 & -1 & 1\end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix}1\\ 4\\ -3\end{bmatrix} \quad x = \begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix}-2 & 3 & -1\\ 1 & 2 & -1\\ -2 & -1 & 1\end{vmatrix} = - \begin{vmatrix}1 & 2 & -1\\ -2 & 3 & -1\\ -2 & -1 & 1\end{vmatrix} = - \begin{vmatrix}1 & 2 & -1\\ 0 & 7 & -3\\ 0 & +3 & -1\end{vmatrix}$$

$$|A| = - \begin{vmatrix}1 & 2 & -1\\ 0 & 7 & -3\\ 0 & 0 & 2/7\end{vmatrix} = (-1)\ 1 \cdot 7 \cdot \frac{2}{7} = -2$$

$$|A_1| = \begin{vmatrix}1 & 3 & -1\\ 4 & 2 & -1\\ -3 & -1 & 1\end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix}2 & -1\\ -1 & 1\end{vmatrix} - 4 \begin{vmatrix}3 & -1\\ -1 & 1\end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix}3 & -1\\ 2 & -1\end{vmatrix} = -4$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix}-2 & 1 & -1\\ 1 & 4 & -1\\ -2 & -3 & 1\end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix}4 & -1\\ -3 & 1\end{vmatrix} - \begin{vmatrix}1 & -1\\ -3 & 1\end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix}1 & -1\\ 4 & -1\end{vmatrix} = -6$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix}-2 & 3 & 1\\ 1 & 2 & 4\\ -2 & -1 & -3\end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix}2 & 4\\ -1 & -3\end{vmatrix} - \begin{vmatrix}3 & 1\\ -1 & -3\end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix}3 & 1\\ 2 & 4\end{vmatrix} = -8$$

$$x_1 = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{-4}{-2} = 2$$

$$x_2 = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{-6}{-2} = 3$$

$$x_3 = \frac{|A_3|}{|A|} = \frac{-8}{-2} = 4$$

$$x = \begin{bmatrix}2\\ 3\\ 4\end{bmatrix}$$

lineer denklem sisteminin çözümüdür.